熊本大学（医学部—医学科）

数学　解答速報

1　4点 A, B, C, D は互いに異なる。

（問1）

$\overrightarrow{AB}=(3,-3,0)$，$\overrightarrow{AC}=(t-1,2t-5,t-1)$ より $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3t+12$ なので

$\angle CAB=90^\circ \Leftrightarrow t=4$

$\overrightarrow{BC}=(t-4,2t-2,t-1)$，$\overrightarrow{BA}=(-3,3,0)$ より $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=3t+6$ なので

$\angle ABC=90^\circ \Leftrightarrow t=-2$

$\overrightarrow{CA}=(1-t,5-2t,1-t)$，$\overrightarrow{CB}=(4-t,2-2t,1-t)$ より

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=3(2t-5)(t-1)$ なので

$\angle BCA=90^\circ \Leftrightarrow t=\frac{5}{2},1$

以上より，求める t の値は

$t=-2,1,\frac{5}{2},4$ …(答)

（問2）

$\overrightarrow{AB}=(3,-3,0)$，$\overrightarrow{AC}=(t-1,2t-5,t-1)$，$\overrightarrow{AD}=(0,1,1)$

点Cが平面ABD上に存在するための条件は，ある実数 α,β が存在して

$\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AD}$ …①

と表されること。①の両辺の成分について

$$\begin{cases} t-1=3\alpha \\ 2t-5=-3\alpha+\beta \\ t-1=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{1}{2} \\ \beta=\frac{3}{2} \\ t=\frac{5}{2} \end{cases}$$

よって，求める t の値は

$t=\frac{5}{2}$ …(答)

（問3）(1)より $t=4$。

$\overrightarrow{AB}=(3,-3,0)$，$\overrightarrow{AC}=(3,3,3)$，$\angle CAB=90^\circ$ より

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times AB\times AC=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times3\sqrt{3}=\frac{9\sqrt{6}}{2}$ …②

点Dから平面ABCにおろした垂線の足をHとすると

$\overrightarrow{AH}=\gamma\overrightarrow{AB}+\delta\overrightarrow{AC}$　（γ,δ は実数）…③

とおくことができる。$\overrightarrow{AD}=(0,1,1)$ も用いて

$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\gamma\overrightarrow{AB}+\delta\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\gamma\times18+\delta\times0+3$

$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AC}=(\gamma\overrightarrow{AB}+\delta\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\gamma\times0+\delta\times27-6$

$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AC}$ より

$$\begin{cases} 18\gamma+3=0 \\ 27\delta-6=0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \gamma=-\frac{1}{6} \\ \delta=\frac{2}{9} \end{cases}$$

これを③に代入して

$\overrightarrow{AH}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{6},\frac{7}{6},\frac{4}{6}\right)$　$\therefore |\overrightarrow{AH}|^2=\frac{11}{6}$

直角三角形ADHにおいて

$DH=\sqrt{AD^2-AH^2}=\sqrt{2-\frac{11}{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$ …④

求める体積を V とおくと，②，④より

$V=\frac{1}{3}\times\triangle ABC\times DH=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{3}{2}$ …(答)

熊本大学（医学部─医学科）

数学　解答速報

$\boxed{2}$ (問1) 硬貨を5回投げて，表が2回，ウラが3回出ればよいので，

求める確率は　${}_5C_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{16}$ ….(答)

(問2) 次のような事象A, Bを考える

A「硬貨を2回投げたあとに，6の目が上にある」

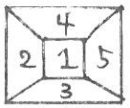
B「硬貨を5回投げたあとに，さいころがR(3,4)の位置にある」

$$P(A)=\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{表が2回}}+\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{ウラが2回}}=\frac{1}{2}$$

$$P(A\cap B)=\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{1,2回目で表2回}}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^3}_{\text{3.4.5回目でウラ3回}}+\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{1,2回目でウラ2回}}\cdot\underbrace{{}_3C_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3}_{\text{3.4.5回目で表2回，ウラ1回}}=\frac{1}{8}$$

求める確率は　$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$ ….(答)

(問3) 以下，置かれているさいころを図のように表現する。

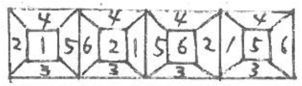


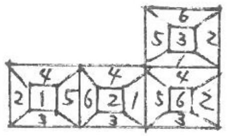
ウラ面 $\boxed{6}$　（この場合 $\boxed{1}$ の目が上にあることを表す）

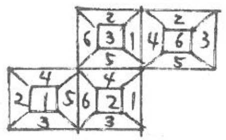
はじめ，R(1,1)に上図のようにさいころが配置されているとする。

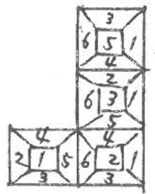
[Ⅰ] 1回目に硬貨の表が出る場合

2,3回目が(表,表)，(表,ウラ)，(ウラ,表)，(ウラ,ウラ)となる4通りに分けて考える

(表,表)  … 4,5回目で残りの3.4の目を出すことはできない

(表,ウラ)  $\boxed{4}$ … 4,5回目に(表,表)で，残りの5.4の目が出せる

(ウラ,表)  $\boxed{1}$ … 4,5回目に(表,ウラ)で残りの4,5の目 (ウラ,表)で残りの5.4の目が出せる。

(ウラ,ウラ)  $\boxed{2}$ ……… 4,5回目に(表,ウラ)で残りの6.4の目 (ウラ,表)で残りの4.6の目が出せる

以上より [Ⅰ]の場合 5通り。

[Ⅱ] 1回目に硬貨のウラが出る場合

[Ⅰ]と同様の議論により，5通り。

[Ⅰ],[Ⅱ]より，条件をみたす移動の仕方は 10通り。

よって求める確率は　$\frac{10}{2^5}=\frac{5}{16}$ …(答)

熊本大学（医学部―医学科）

数学　解答速報

$\boxed{3}$

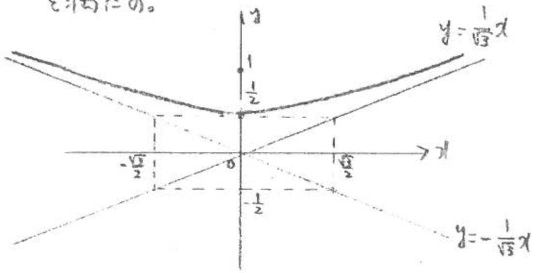
(問1)　$|z+i|-|z-i|=1$ …①

①より z は点 i と点 $-i$ からの距離が1（一定）だから焦点 $\pm i$ の双曲線の一部である。

したがって、$z=x+yi$ とおくと、z は方程式

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=-1 \quad (y\geqq 0)$$

を満たす。



ゆえに θ_1 の範囲は

$\frac{\pi}{6}<\theta_1<\frac{5\pi}{6}$ …(答)

(問2)　$z=r(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$　$\left(r\geqq\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{6}<\theta_1<\frac{5\pi}{6}\right)$ とすると、

$w=\frac{1}{z}=z^{-1}$

ド・モアブルの定理より

$w=\frac{1}{r}\{\cos(-\theta_1)+i\sin(-\theta_1)\}$

$|w|=r_2=\frac{1}{r}$　$\left(r\geqq\frac{1}{2}\right)$ から

$0<r_2\leqq 2$ …(答)

また、$\theta_2=\arg w=-\theta_1+2n\pi$（$n$ は整数）から

$\theta_1=2n\pi-\theta_2$

$\frac{\pi}{6}<\theta_1<\frac{5\pi}{6}$ より

$2n\pi-\frac{5\pi}{6}<\theta_2<2n\pi-\frac{\pi}{6}$

$0\leqq\theta_2<2\pi$ だから $n=1$ として

$\frac{7\pi}{6}<\theta_2<\frac{11\pi}{6}$ …(答)

熊本大学（医学部―医学科）

数学　解答速報

$\boxed{4}$ $f(x)=\sqrt{3x^2+x^3}$ $(x \geqq -3)$

(1) $f'(x)=\dfrac{6x+3x^2}{2\sqrt{3x^2+x^3}}=\dfrac{3x(2+x)}{2\sqrt{3x^2+x^3}}=0$

とおくと　$x>-3$ のとき　$x=-2$（∵ 分母 $\neq 0$）

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	／	$+$
$f(x)$	0	↗	極大	↘	極小	↗

増減表より　極大値　$f(-2)=2$ ---（答）

(2)

$\int\sqrt{3t^2+t^3}\,dt=\int|t|\sqrt{3+t}\,dt$

$\sqrt{3+t}=s$ とおくと　$t=s^2-3$

$\dfrac{1}{2\sqrt{3+t}}dt=ds$ より　$dt=2\sqrt{3+t}\,ds$
$=2s\,ds$

∴ $\int|t|\sqrt{3+t}\,dt=\int|s^2-3|\cdot 2s^2ds$

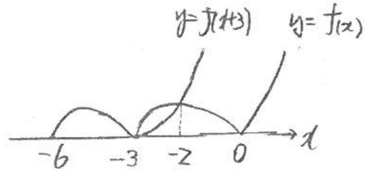
$F(x)=\int_x^{x+3}f(t)dt$ のとき

$F'(x)=f(x+3)-f(x)=0$ とおくと

$9x^2+45x+54=0$

$x^2+5x+6=0$

$(x+2)(x+3)=0$ より　$x=-2$
$(x>-3)$



x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$F'(x)$	／	$-$	0	$+$	／
$F(x)$		↘	極小	↗	

増減表より（$-3\leqq x\leqq 0$ において）$F(x)$ は $x=-2$ のときに極小かつ最小となる。

$F(-2)=\int_{-2}^{1}|t|\sqrt{3+t}\,dt$

$\begin{pmatrix} t: -2 \longrightarrow 1 \\ s: 1 \longrightarrow 2 \end{pmatrix}$

$=\int_1^2|s^2-3|\cdot 2s^2ds$

$=2\int_1^{\sqrt3}(-s^2+3)s^2ds+2\int_{\sqrt3}^{2}(s^2-3)s^2ds$

$=2\left[-\frac15 s^5+s^3\right]_1^{\sqrt3}+2\left[\frac15 s^5-s^3\right]_{\sqrt3}^{2}$

$=\dfrac{24}{5}(\sqrt3-1)$

$F(-3)=\int_{-3}^{0}|t|\sqrt{3+t}\,dt$　$\begin{pmatrix} t: -3 \longrightarrow 0 \\ s: 0 \longrightarrow \sqrt3 \end{pmatrix}$

$=\int_0^{\sqrt3}|s^2-3|\cdot 2s^2ds=2\int_0^{\sqrt3}(-s^2+3)\cdot s^2ds$

$=2\left[-\frac15 s^5+s^3\right]_0^{\sqrt3}=\dfrac{12}{5}\sqrt3$

$F(0)=\int_0^3|t|\sqrt{3+t}\,dt$　$\begin{pmatrix} t: 0 \longrightarrow \sqrt3 \\ s: \sqrt3 \longrightarrow \sqrt6 \end{pmatrix}$

$=\int_{\sqrt3}^{\sqrt6}|s^2-3|\cdot 2s^2ds$

$=2\int_{\sqrt3}^{\sqrt6}(s^2-3)\cdot s^2ds=2\left[\frac15 s^5-s^3\right]_{\sqrt3}^{\sqrt6}$

$=\dfrac{12}{5}(\sqrt6+\sqrt3)>F(-3)$ だから

最大値　$F(0)=\dfrac{12}{5}(\sqrt6+\sqrt3)$

以上より

$\begin{cases} \text{最小値 } F(-2)=\dfrac{24}{5}(\sqrt3-1) \\ \text{最大値 } F(0)=\dfrac{12}{5}(\sqrt6+\sqrt3) \end{cases}$ ---（答）