九州大学(文系)

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とすると $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$y=f(x)$ が点 $(c,0)$ で x 軸に接しているので、$f(c)=0$ …① かつ $f'(c)=0$ …②

①より $c^3+ac^2+bc+c=0$ …①′　　②より $3c^2+2ac+b=0$ …②′

②′より $b=-3c^2-2ac$　これを①′に代入して

$c^3+ac^2+(-3c^2-2ac)c+c=0$ となり、整理すると $ac^2=-2c^3+c$

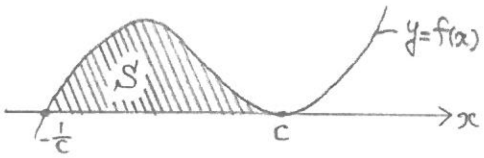
$c>0$ より $\underline{a=-2c+\frac{1}{c}}$ …(答)

このとき、$b=-3c^2-2\left(-2c+\frac{1}{c}\right)c=-3c^2+4c^2-2=\underline{c^2-2}$ …(答)

(2) (1)の結果から、方程式 $f(x)=0$ は $x=c$ を重解にもつことに注目すれば

$x^3-\left(2c-\frac{1}{c}\right)x^2+(c^2-2)x+c=0 \iff (x-c)^2\left(x+\frac{1}{c}\right)=0$　$\therefore x=c,\ -\frac{1}{c}$

よって、$y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形は、右図の斜線部。その面積を S とすると、



$$S=\int_{-\frac{1}{c}}^{c}(x-c)^2\left(x+\frac{1}{c}\right)dx$$
$$=\int_{-\frac{1}{c}}^{c}(x-c)^2\left\{(x-c)+\left(c+\frac{1}{c}\right)\right\}dx$$
$$=\int_{-\frac{1}{c}}^{c}\left\{(x-c)^3+\left(c+\frac{1}{c}\right)(x-c)^2\right\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}(x-c)^4+\frac{1}{3}\left(c+\frac{1}{c}\right)(x-c)^3\right]_{-\frac{1}{c}}^{c}=\frac{1}{12}\left(c+\frac{1}{c}\right)^4$$

ここで、$c>0$、$\frac{1}{c}>0$ であるから、相加・相乗平均の大小関係より

$c+\frac{1}{c}\geqq 2\sqrt{c\cdot\frac{1}{c}}=2$　等号成立は $c=\frac{1}{c}=1$ より $c=1$ のとき。

したがって、S は $c=1$ のとき最小値 $\frac{1}{12}\cdot 2^4=\frac{4}{3}$ をとる　$\underline{\therefore c=1}$ …(答)

九大(文) [2]

以下、7を法とする合同式を考える。

(1) $2^1 \equiv 2$, $2^2 = 4 \equiv 4$, $2^3 = 8 \equiv 1$, $2^4 = 16 \equiv 2$, $2^5 = 32 \equiv 4$, $2^6 = 64 \equiv 1$,

$2^7 = 128 \equiv 2$, … となるので、7で割った余りは、

2, 4, 1 のくり返しとなる。よって kを自然数として

$n = 3k-2$ のとき 2　$n = 3k-1$ のとき 4　$n = 3k$ のとき 1

(2) m を10進法で表すと

$$m = 2^{17} + 2^{15} + 2^{14} + 2^{12} + 2^{11} + 2^{9} + 2^{8} + 2^{6} + 2^{5} + 2^{3} + 2^{2} + 1$$

$$= (2^2 + 1)(2^{15} + 2^{12} + 2^{9} + 2^{6} + 2^{3} + 1)$$ であるから

$$m \equiv (4+1)(1+1+1+1+1+1) \equiv 30 \equiv 2$$

よって、mを7で割った余りは 2

〔3〕

(1) $L = |\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2$

$= |\vec{a} - \vec{x}|^2 + |\vec{b} - \vec{x}|^2 + |\vec{c} - \vec{x}|^2$

$= (|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{x} + |\vec{x}|^2) + (|\vec{b}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{x} + |\vec{x}|^2)$

$\quad + (|\vec{c}|^2 - 2\vec{c}\cdot\vec{x} + |\vec{x}|^2)$

$= 3|\vec{x}|^2 - 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\cdot\vec{x} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$

(2) $L = 3\left(|\vec{x}|^2 - 2\cdot\dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}\cdot\vec{x}\right) + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$

$= 3\left|\vec{x} - \dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}\right|^2 - \dfrac{1}{3}|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$

$\triangle ABC$の重心をGとすると、$\overrightarrow{OG} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

また、$-\dfrac{1}{3}|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$

$= -\dfrac{1}{3}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{c}\cdot\vec{a})$

$\quad + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$

$= \dfrac{2}{3}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{c}\cdot\vec{a})$

$= \dfrac{1}{3}\{(|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2) + (|\vec{b}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2)$

$\quad + (|\vec{c}|^2 - 2\vec{c}\cdot\vec{a} + |\vec{a}|^2)\}$

$= \dfrac{1}{3}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2)$

であるから、

$L = 3|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OG}|^2 + \dfrac{1}{3}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2)$

$= 3|\overrightarrow{GP}|^2 + \dfrac{1}{3}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2)$

となる。

よって，Lは$|\overrightarrow{GP}|=0$ 即ち，点Pが点Gに一致するときに最小となる。
このときの最小値は $\frac{1}{3}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2)$ である。
以上より，Lを最小とする点Pは三角形ABCの重心であって，Lの最小値は $\frac{1}{3}(AB^2+BC^2+CA^2)$ である。

九大(文系)

[4]

(1) 部品 a, b, c が不良品であるという事象を A, B, C とし、
不良品でないという事象を $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ とする。

また事象 X が起こる確率を $P(X)$, 事象 X が起こった条件のもとで事象 Y が起こる確率を $P_X(Y)$ とする。

求める確率 $P(A\cup B) = P(A)+P(\overline{A}\cap B) = P(A)+P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)$

$= p+(1-p)q = p+q-pq$

(2) 求める確率 $P(C) = P(B\cap C)+P(\overline{B}\cap C)$

ここで $P(B\cap C) = P(B)\times P_B(C)$

$= \{P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)\}\times P_B(C)$

$= \{P(A)\times P_A(B)+P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)\}\times P_B(C)$

$= \{p\times(3q)+(1-p)\times q\}\times(5r)$

$= 5(2p+1)qr$

また $P(\overline{B}\cap C) = P(\overline{B})\times P_{\overline{B}}(C) = \{1-P(B)\}P_{\overline{B}}(C)$

$= \{1-(2p+1)q\}r = (1-q-2pq)r$

よって $P(C) = 5(2p+1)qr+(1-q-2pq)r$

$= (1+4q+8pq)r$

(3) 求める確率 $P_C(B) = \dfrac{P(B\cap C)}{P(C)} = \dfrac{5(2p+1)qr}{(1+4q+8pq)r}$

$= \dfrac{5(2p+1)q}{1+4q+8pq}$